

Probeklausur

Hinweis: Die Probeklausur dient zur Vorbereitung auf die Abschlussklausur. Letztere wird auch Themen behandeln, die bisher noch nicht Gegenstand der Vorlesung waren (beispielweise die Theorie der Markovketten). Sie müssen keine Lösungen abgeben. Es werden Lösungshinweise hochgeladen werden, Fragen werden sehr gerne besprochen.

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Es sei (Ω, \mathbb{P}) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für $A, B, C \subseteq \Omega$ gelte:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

a) Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(A \cup C), \quad \mathbb{P}(A \setminus C) \text{ und } \mathbb{P}((A \cup B) \setminus C).$$

b) Leiten Sie aus $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ eine entsprechende Formel für $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ her und beweisen Sie diese.

Lösung:

a) Es ist

$$\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{7}{8}$$

$$\mathbb{P}(A \setminus C) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cup B) \setminus C) &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Setze $D := A \cup B$ und benutze die bekannte Formel:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D \cup C) &= \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(D \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte).

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 1, 2\}$ und

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$$

sowie Y ein Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$ und den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{3}{4}.$$

- Hinweis:** Beachten Sie, dass $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) + \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1) = 1$ gilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1)$, $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1)$ und $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 2)$.
- Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Verteilung von Y , d.h. $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ und $\mathbb{P}(Y = y)$ für alle $x \in \{-1, 1, 2\}$ und $y \in \{0, 1\}$.
- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[X + Y]$.
- Berechnen Sie $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ und die Varianz $\text{Var}(X)$ von X .
- Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- a) $\mathbb{P}(\cdot \mid X = -1)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also gilt

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) + \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1) = \mathbb{P}(Y \in \{0, 1\} \mid X = -1) = 1.$$

Wir erhalten hiermit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\ \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- b) Wir erhalten

$$\mathbb{P}(Y = 0, X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

und mit analoger Rechnung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0, X = 1) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, & \mathbb{P}(Y = 0, X = 2) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}, \\ \mathbb{P}(Y = 1, X = -1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, & \mathbb{P}(Y = 1, X = 1) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(Y = 1, X = 2) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}, \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{17}{24}. \end{aligned}$$

- c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \\ \mathbb{E}[Y] &= 1 \cdot \frac{17}{24} = \frac{17}{24}, \\ \mathbb{E}[X + Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{37}{24}. \end{aligned}$$

d) Zunächst ist

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = (-1) \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{3}.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

und daher

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{29}{36}.$$

e) Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig, da

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \frac{2}{3} \neq \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{24} = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Aufgabe 3 (10 Punkte).

An einer E-Mail-Adresse kommen erwünschte E-Mails und Spam-Mails an. Jede ankommende E-Mail sei unabhängig von den vorangegangenen mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ **erwünscht**. Sei S_n die zufällige Anzahl von **nicht erwünschten** Spam-Mails bei n eingegangenen E-Mails.

a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable S_n ?

Berechnen Sie $\mathbb{P}(S_n \geq 2)$ für $p = 0.7$ und $n = 10$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[S_n]$ und die Varianz $\text{Var}(S_n)$ für $p = 0.7$ und für $n = 10$.

c) Schätzen Sie für $p = 0.7 = 1 - q$, $n = 500$ und $\varepsilon = 0.05$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot S_n - q\right| \geq \varepsilon\right)$$

nach oben mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung ab.

d) Sei nun $p \in (0, 1)$ wieder beliebig. Ferner bezeichne T die zufällige Anzahl an Spam-Mails bis zur ersten erwünschten E-Mail.

Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $T + 1$?

Geben Sie $\mathbb{E}[T]$ an.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T \geq 2)$ für allgemeines p sowie für $p = 0.7$.

Lösung:

a) Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit und der festen Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ einer nicht erwünschten Spam-Mail („Treffer“) ist S_n binomialverteilt mit $S_n \sim \text{Bin}(n, q)$, also

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(S_n = 0) - \mathbb{P}(S_n = 1) = 1 - q^0 \cdot p^{10} - \binom{10}{1} \cdot q^1 \cdot p^9 \\ &= 1 - 0.7^{10} - 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 \approx 0.8507.\end{aligned}$$

b) Es gilt $\mathbb{E}[S_n] = n \cdot q = 10 \cdot 0.3 = 3$ und $\text{Var}(S_n) = n \cdot q \cdot p = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 2.1$.

c) Die Chebyshev-Ungleichung ergibt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot S_n - q\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{q \cdot p}{n \cdot \varepsilon^2} = \frac{0.3 \cdot 0.7}{500 \cdot 0.05^2} = \frac{21}{125} \approx 0.168.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = j) &= \mathbb{P}(\text{zunächst } j \text{ Spam-Mails, dann eine erwünschte E-Mail}) \\ &= q^j \cdot p,\end{aligned}$$

also folgt $T + 1$ einer geometrischen Verteilung $\text{Geo}(p)$. Nach Vorlesung gilt daher

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T + 1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p}.$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(T = 0) - \mathbb{P}(T = 1) = 1 - p - q \cdot p = q - q \cdot p \\ &= q \cdot (1 - p) = q^2 = 0.3^2 = 0.09.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte).

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $\mathcal{N}(2, 1)$. Weiter sei $Y := 1 - 2X$.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[Y]$ und die Varianz $\text{Var}(Y)$.
- b) Welche Verteilung hat Y ?
- c) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 3)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ aus.
- d) Bestimmen Sie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}.$$

- e) Sei U eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable, das heißt $U \sim \text{Unif}(0, 1)$. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $2 \cdot \Phi^{-1}(U) + 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- a) $\mathbb{E}[Y] = E[1 - 2X] = 1 - 2\mathbb{E}[X] = 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$ und $\text{Var}(Y) = \text{Var}(1 - 2X) = \text{Var}(-2X) = 4\text{Var}(X) = 4 \cdot 1 = 4$.
- b) Nach Vorlesung ist $Y \sim \mathcal{N}(-3, 4)$.
- c) Für eine Zufallsvariable $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt $-3 + 2N \sim \mathcal{N}(-3, 4)$ und daher folgt zusammen mit b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 3) &= \mathbb{P}(-1 \leq -3 + 2N \leq 3) = \mathbb{P}(1 \leq N \leq 3) \\ &= \Phi(3) - \Phi(1).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, 1 - 2X) = \text{Cov}(X, -2X) = -2\text{Cov}(X, X) = -2\text{Var}(X) = -2, \\ \rho(X, Y) &= \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} = (-2) / \sqrt{1 \cdot 4} = -1.\end{aligned}$$

- e) Nach Übung gilt zunächst $\Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Nach Vorlesung folgt daher $2\Phi^{-1}(U) + 1 \sim \mathcal{N}(1, 4)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte).

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta > 0$ für die Verteilung mit der Dichte

$$f_{\vartheta}(t) = \begin{cases} \frac{4t^3}{\vartheta} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\vartheta} \cdot t^4\right), & t > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt werden.

- a) Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ und die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta) := \ln L_x(\vartheta)$ an.
- b) Berechnen Sie die Ableitung $M'_x(\vartheta)$.
- c) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x .
- d) Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von X_1 , wenn X_1 die Dichte f_{ϑ} hat. Zeigen Sie dann, dass X_1^4 einer $\text{Exp}(\frac{1}{\vartheta})$ -Verteilung folgt.
- e) Ist $\hat{\vartheta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ ?

Lösung: Für die Lösung kann man annehmen, dass $x_j > 0$ für $j = 1, \dots, n$. Anderenfalls wäre $\bar{L}_x(\vartheta) = 0$ und $M_x(\vartheta) = -\infty$ für alle $\vartheta > 0$.

- a) Die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ lautet

$$L_x(\vartheta) = \prod_{j=1}^n f_{\vartheta}(x_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\vartheta} \cdot (4x_j^3) \cdot \exp\left(-\frac{x_j^4}{\vartheta}\right) \right) = \frac{1}{\vartheta^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\vartheta} \sum_{j=1}^n x_j^4\right) \prod_{j=1}^n (4x_j^3).$$

Die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ lautet entsprechend

$$M_x(\vartheta) = \log L_x(\vartheta) = -n \log \vartheta - \frac{1}{\vartheta} \sum_{j=1}^n x_j^4 + \sum_{j=1}^n \log(4x_j^3).$$

- b) Differenzieren von $M_x(\vartheta)$ nach ϑ liefert

$$M'_x(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{j=1}^n x_j^4 = -\frac{n}{\vartheta^2} \left(\vartheta - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4 \right).$$

- c) Die Bedingung $M'_x(\vartheta) = 0$ führt auf $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4$. Dann ist $\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ , da $M'_x(\cdot)$ in der einzigen Nullstelle $\hat{\vartheta}(x)$ ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat.

- d) Für $z \geq 0$ ist

$$F_{X_1}(z) = \int_0^z \frac{4}{\vartheta} t^3 e^{-t^4/\vartheta} dt = [-e^{-t^4/\vartheta}]_0^z = 1 - e^{-z^4/\vartheta}$$

und folglich

$$F_{X_1^4}(z) = \mathbb{P}(X_1^4 \leq z) = \mathbb{P}(X_1 \leq z^{1/4}) = 1 - e^{-z/\vartheta}.$$

Beide Verteilungsfunktionen sind offensichtlich Null für $z < 0$. Insbesondere gilt daher, dass $X_1^4 \sim \text{Exp}(1/\vartheta)$.

- e) Der Schätzer ist erwartungstreu, da aufgrund des vorangehenden Aufgabenteils gilt:

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[\hat{\vartheta}(x)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j^4] = \mathbb{E}[X_1^4] = (1/\vartheta)^{-1} = \vartheta.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte).

- (a) Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 25$ ergab den Mittelwert $\bar{x} = 210$ und Stichprobenvarianz $s^2 = 144$. Berechnen Sie ein zweiseitiges Intervall das den Erwartungswert von X mit Wahrscheinlichkeit 0,9 überdeckt.
- (b) Eine Nagelfabrik verkauft Nägel unter der Bezeichnung „100mm-Nägel“. Wie bei allen industriell gefertigten Gütern kommt es auch hier zu Schwankungen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die tatsächliche Länge der Nägel einer Normalverteilung entspricht. Die Qualitätssicherung möchte überprüfen, ob diese Nägel wirklich im Mittel 100mm lang sind. Hierzu werden 16 Nägel vermessen. Es ergibt sich eine mittlere Länge von 100,031mm bei einer Stichprobenvarianz von 0,01mm². Kann die Qualitätssicherung mit 95%-iger Sicherheit behaupten, dass die mittlere Länge nicht stimmt?

Lösung: Nach Vorlesung ist das Konfidenzintervall $(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$.

a) Hier ist $n = 25$, $S = \sqrt{144} = 12$, $\bar{X} = 210$, $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$. Den Wert für $t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.95, 24}$ liest man in einer geeigneten Tabelle ab und setzt alle Werte ein: Nach Anhang ist $t_{0.95, 24} \approx 1.711$. Also $(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \approx (210 - 1.711 \cdot 12/5, 210 + 1.711 \cdot 12/5) = (205.8936, 214.1064)$.

b) Nun ist $n = 16$, $\bar{X} = 100.031$, $S = 0.1$, $\alpha = 0.05$. Also $(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \approx (99.977725, 100.084275) \ni 100$. Die Qualitätssicherung kann also *nicht* mit 95%-iger Sicherheit behaupten, dass die mittlere Länge nicht stimmt.

Alternativ: Wende Hypothesentest Rezept 2: t -Test a) an: $H_0 : \mu = 100$. Teststatistik $T = (\bar{X} - \mu_0)/S \cdot \sqrt{n} = 0.31 \cdot 4 = 1.24$. Wegen $t_{15,0.975} \approx 2.131$ ist das Ablehnungskriterium *nicht* erfüllt.

Viel Erfolg! :)

A Tabelle zur Standardnormalverteilung

Die folgende Tabelle enthält die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Tabelle ist zu lesen: $\Phi(1,11) = 0,8665$, dabei gilt: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ für $z \geq 0$.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Ausgewählte Quantile z_γ der Standardnormalverteilung:

γ	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
z_γ	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290

B Tabelle zur Student- t -Verteilung

Die folgende Tabelle enthält die Werte der Quantile $t_{1-\alpha,n}$ für die Student- t -Verteilung.

Die Tabelle ist wie folgt zu lesen: Sei $n = 50$, $1 - \alpha = 0,999 \implies t_{0,999,50} = 3.261$.

Wie aus der Zeile $n = \infty$ zu entnehmen, gilt $t_{1-\alpha,n} = z_{1-\alpha}$ für $n \rightarrow \infty$. Als Faustregel gilt für $n > 30$: $t_{1-\alpha,n} \approx z_{1-\alpha}$ als Approximation, wobei $z_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

$n \backslash 1 - \alpha$	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
50	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.674	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090